

## فهرست مطالب

### فصل اول: تابع

۱.....	درسنامه‌۱: انواع تابع و مفاهیم مرتبط با آن
۱.....	مفهوم تابع .....
۲.....	اعمال جبری روی توابع .....
۲.....	انواع تابع .....
۳.....	خواص قدرمطلق .....
۵.....	بررسی تقارن‌های یک منحنی .....
۷.....	توابع زوج یا فرد .....
۸.....	نکات مهم در مورد توابع زوج و فرد .....
۸.....	تابع یک به یک .....
۹.....	تابع پوششی (پوشش) .....
۱۱.....	درسنامه‌۲: توابع معکوس و ترکیب توابع .....
۱۱.....	تابع معکوس .....
۱۱.....	نحوه بهدست آوردن تابع معکوس .....
۱۴.....	ترکیب دو تابع .....
۱۶.....	بهدست آوردن $g(x)$ .....
۱۶.....	بهدست آوردن ضابطه‌ی $f(x)$ .....
۱۸.....	درسنامه‌۳: توابع مثلثاتی و متناوب و وارون مثلثاتی .....
۱۸.....	تابع مثلثاتی .....
۲۰.....	تابع متناوب .....
۲۳.....	تابع وارون مثلثاتی .....
۲۴.....	روابط و خواص مهم توابع وارون مثلثاتی .....
۲۶.....	درسنامه‌۴: توابع هیپربولیک و وارون هیپربولیک .....
۲۶.....	تابع هیپربولیک .....
۲۸.....	معکوس تابع هیپربولیک .....
۲۹.....	روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و توابع هیپربولیک .....
۳۰.....	درسنامه ۵: بهدست آوردن دامنه و بود تابع .....
۳۰.....	محاسبه دامنه تابع .....
۳۱.....	نامساوی‌های لگاریتمی .....
۳۳.....	دامنه تابع وارون .....
۳۳.....	برد تابع .....
۳۷.....	تعیین برد تابع شامل جزء صحیح ( $y = \lfloor f(x) \rfloor$ ) .....
۳۸.....	برد تابع نمایی و لگاریتمی .....
۴۰.....	تساوی دو تابع .....
۴۱.....	درسنامه ۶: مفهوم فاکتوریل و بسط دوچمله‌ای .....
۴۱.....	فاکتوریل .....
۴۲.....	بسط دوچمله‌ای نیوتون .....
۴۴.....	درسنامه ۷: مقاطع مخروطی (منحنی‌های درجه دو) .....

## فهرست مطالب

### فصل دوم: حد و پیوستگی

درسنامه‌ها: تعاریف حد، محاسبه‌ی مستقیم حد، حدود چپ و راست ..... ۴۷
تعريف حدود چپ و راست ..... ۴۷
ویژگی جایگذاری مستقیم در ضابطه‌ی تابع ..... ۴۷
قواعد و قضایای حد ..... ۴۷
تعريف صفر حدی ( ${}^+_{\circ} \text{ و } {}^-_{\circ}$ ) ..... ۴۸
در چه نوع حدودی حتماً لازم است هم حد چپ و هم حد راست را حساب کنیم؟ ..... ۵۱
موقعیت حدی نقطه ..... ۵۶
درسنامه ۲: حالت مبهم ..... ۵۸
رفع ابهام از حالت مبهم ..... ۵۸
درسنامه ۳: حالت مبهم ..... ۷۲
درسنامه ۴: حالت مبهم ..... ۷۹
درسنامه ۵: حالت مبهم ..... ۸۳
درسنامه ۶: حالت مبهم ..... ۸۷
درسنامه ۷: حالت مبهم ..... ۸۸
درسنامه ۸: حالت مبهم ..... ۸۹
درسنامه ۹: پیوستگی تابع ..... ۹۴
جهش انفال تابع ..... ۹۷
چند نکته در مورد توابع پیوسته ..... ۹۷
پیوستگی تابع در یک فاصله ..... ۹۸
تعريف ناپیوستگی رفع شدنی و رفع نشدنی ..... ۹۹
به دست آوردن نقاط انفال توابعی به فرم $y = [f(x)]$ ..... ۱۰۰
درسنامه ۱۰: قضیه مقدار میانی (بولزانو) ..... ۱۰۲
درسنامه ۱۱: مجانب ..... ۱۰۴
روش‌های تعیین مجانب مایل ..... ۱۰۶
مجانب توابع پارامتری ..... ۱۱۰
مجانب توابع ضمنی ..... ۱۱۱

### فصل سوم: مشتق و کاربرد مشتق

درسنامه‌ها: مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری ..... ۱۱۲
تعییر هندسی و تعریف مشتق ..... ۱۱۲
مشتق چپ و راست ..... ۱۱۳
رابطه‌ی بین مشتق و پیوستگی ..... ۱۱۴
نقاط مشتق‌نپذیر توابع ..... ۱۱۶
قواعد مشتق‌گیری ..... ۱۱۸
نوشتن تابع مشتق توابع چند ضابطه‌ای ..... ۱۱۹
مشتق حاصل جمع، حاصل ضرب و تقسیم دو عبارت ..... ۱۲۰
استفاده از لگاریتم در مشتق‌گیری ..... ۱۲۱
مشتقات مراتب بالاتر ..... ۱۲۳
محاسبه‌ی مشتق مرتبه ۱۱ ام ..... ۱۲۴
فرمول لاپنیتز ..... ۱۲۷
بررسی مشتق‌پذیری سه تابع مهم ..... ۱۲۸
مشتق منحنی‌های پارامتری ..... ۱۳۳
عامل صفر کننده در مشتق ..... ۱۳۴
نرخ تغییرات ..... ۱۳۴
چند نکته تکمیلی در مورد مشتق ..... ۱۳۵

## فهرست مطالب

درسنامه ۱: مشتق‌گیری ضمنی	۱۳۶
درسنامه ۲: قاعده زنجیره‌ای مشتق	۱۴۰
مشتق تابع (x) fog(x)	۱۴۰
درسنامه ۳: مشتق تابع معکوس	۱۴۲
درسنامه ۴: استفاده از تعریف مشتق در حل مسائل	۱۴۶
چه زمانی لازم است از تعریف مشتق استفاده کنیم؟	۱۴۶
بررسی توابعی به فرم کلی $f^a(x) \cos \frac{c}{g^b(x)}$ و $f^a(x) \sin \frac{c}{g^b(x)}$	۱۴۹
<b>درسنامه ۵: آهنگ تغییر</b>	۱۵۵
آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر	۱۵۵
آهنگ تغییر در فیزیک	۱۵۵
آهنگ تغییر در اقتصاد	۱۵۵
آهنگ تغییر در زیست‌شناسی	۱۵۶
کمیت‌های دارای رشد (با زوال) نمایی	۱۵۶
نیمه‌عمر مواد رادیواکتیو	۱۵۷
آهنگ‌های وابسته	۱۵۸
دستورالعمل حل مسائل آهنگ‌های وابسته	۱۵۸
<b>درسنامه ۶: خطوط قائم و مماس بر یک منحنی</b>	۱۶۶
معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی	۱۶۶
تحت مماس و تحت قائم	۱۷۰
طول مماس و طول قائم	۱۷۱
منحنی‌های مماس برهم	۱۷۱
زاویه بین دو منحنی	۱۷۴
زاویه بین دو نیمه‌مماس	۱۷۵
یافتن معادله خط مماس یا قائم از نقطه‌ای خارج منحنی	۱۷۶
<b>درسنامه ۷: نقاط اکسترم، عطف و تشخیص رفتار تابع</b>	۱۷۸
تعریف ماکریم و مینیم (موضعی)	۱۷۸
تعریف ماکریم و مینیم مطلق	۱۷۸
نحوه تعیین نقاط ماکریم و مینیم نسبی	۱۷۹
تعیین نقاط Max و Min مطلق تابع	۱۸۴
بررسی وجود Max و Min مطلق روی بازه‌ی باز (a, b)	۱۸۶
استفاده از آزمون مشتق دوم چه زمانی مناسب است؟	۱۸۸
چند نکته در مورد نقاط اکسترم توابع	۱۹۰
چند نکته در مورد ارتباط نقاط بازگشت و اکسترم‌های نسبی	۱۹۱
پیدا کردن برد تابع با استفاده از مشتق	۱۹۲
تعیین صعودی و نزولی بودن تابع به کمک مشتق	۱۹۳
رابطه‌ی بین مقاهم صعودی و نزولی، یک به یک بودن و یکنوا بودن	۱۹۶
بررسی چند تابع مهم	۱۹۷
تعریف تقر	۱۹۸
تعریف نقطه عطف و روش‌های به دست آوردن آن	۱۹۹
روش به دست آوردن نقطه عطف	۲۰۰
آزمون مشتق سوم در تعیین نقطه عطف	۲۰۴
استفاده از بسط تیلور برای تشخیص نمودار (x) حول یک نقطه	۲۰۵
روشی دیگر در تعیین نقاط عطف، ماکریم و مینیم نسبی	۲۰۶
روابط بین نمودارهای f, f' و f''	۲۰۷

## فهرست مطالب

۲۱۳	درسنامه ۹: مسائل بهینه‌سازی
۲۱۶	دستورالعمل حل مسائل بهینه‌سازی
۲۳۱	مسائل بهینه‌سازی در اقتصاد
۲۳۲	چند نکته برای محاسبهٔ مقادیر اکسترم مطلق بدون استفاده از مشتق
۲۳۴	درسنامه ۱۰: قضاای مقدار میانگین، رُل و کشی
۲۳۹	کاربردهای قضیهٔ مقدار میانگین
۲۴۲	قضیهٔ مقدار میانگین در حالت کلی تر
۲۴۳	درسنامه ۱۱: تعريف دیفرانسیل و محاسبهٔ تقریبی مقدار تابع
۲۴۳	مفهوم دیفرانسیل تابع ( $x$ )
۲۴۴	تقریب خطی مقدار ( $x$ ) (کاربرد دیفرانسیل)

## فصل چهارم: انتگرال

۲۴۷	درسنامه ۱۲: فرمول‌ها و تغییر متغیرهای مناسب در انتگرال‌گیری
۲۴۷	فرمول‌های مهم انتگرال
۲۴۸	خواص انتگرال نامعین
۲۵۱	انتگرال معین
۲۵۲	قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۲۵۶	از کجا بفهمیم از چه تغییر متغیری باید استفاده کنیم؟
۲۵۷	تغییر متغیر در انتگرال‌های شامل رادیکال
۲۶۳	انتگرال دیفرانسیل دو جمله‌ای و قضیهٔ چیزش
۲۶۶	استفاده از روش‌های ابتکاری در محاسبهٔ انتگرال‌ها
۲۶۹	درسنامه ۱۳: محاسبهٔ انتگرال‌های شامل توابع متناظر با هیپربولیک
۲۶۹	محاسبهٔ انتگرال‌های $\sin$ و $\cos$ با توان فرد
۲۶۹	محاسبهٔ انتگرال‌های $\sin$ و $\cos$ با توان زوج
۲۶۹	محاسبهٔ انتگرال‌های به صورت $\int \sin^m x \cos^n x dx$ که در آنها $m$ و $n$ اعدادی صحیح هستند.
۲۷۰	محاسبهٔ انتگرال $\int \sin^m x \cos^n x dx$ وقتی $m$ و $n$ اعدادی گویا باشند
۲۷۰	محاسبهٔ انتگرال‌های $\cot g^n x$ و $\operatorname{tg}^n x$ ( $n$ عدد طبیعی است)
۲۷۱	محاسبهٔ انتگرال‌هایی به صورت کلی $\int (\sec^m x)(\operatorname{tg}^n x) dx$
۲۷۲	محاسبهٔ انتگرال‌های حاصل‌ضرب دو جمله سینوسی و کسینوسی
۲۷۳	محاسبهٔ انتگرال‌هایی به صورت $\int f(\sin x, \cos x) dx$
۲۷۶	محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int f(\sinh x, \cosh x) dx$
۲۷۷	محاسبهٔ انتگرال‌هایی به صورت کلی $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x} dx$
۲۷۸	درسنامه ۱۴: روش انتگرال‌گیری جزء به جزء
۲۸۹	انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک تشکیل جدول
۲۹۳	کاهش مرتبهٔ انتگرال‌گیری و استفاده از قاعدهٔ جزء به جزء
۲۹۵	درسنامه ۱۵: انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها (تجزیه کسرهای جزئی)
۲۹۵	انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها (تجزیه کسرهای جزئی)
۲۹۶	محاسبهٔ ضرایب در کسرهای جزئی
۳۰۱	درسنامه ۱۶: نکات و خواص مهم انتگرال‌های معین
۳۱۷	چند فرمول دیگر از انتگرال‌های معین
۳۱۷	قضیهٔ مقدار میانگین در انتگرال (محاسبهٔ مقادیر متوسط توابع)
۳۱۹	تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین
۳۲۰	درسنامه ۱۷: محاسبهٔ انتگرال‌های شامل جزء صحیح و قدرمطلق
۳۲۰	محاسبهٔ انتگرال‌های شامل برآکت (جزء صحیح)
۳۲۳	محاسبهٔ انتگرال‌های شامل قدرمطلق

## فهرست مطالب

۳۲۶.....	<b>درسنامه ۷: انتگرال‌های غیرعادی (ناسره)</b>
۳۲۶.....	انتگرال‌های غیرعادی (ناسره)
۳۲۷.....	ناسره‌گی ترکیبی در انتگرال‌ها
۳۲۸.....	بررسی وضعیت همگرایی و واگرایی در انتگرال‌ها
۳۲۹.....	استفاده از همارزی در بررسی همگرایی و واگرایی انتگرال‌ها
۳۴۰.....	آزمون مقایسه
۳۴۱.....	همگرایی مطلق و همگرایی مشروط
۳۴۲.....	چند نکته در مورد دو انتگرال مهم
۳۴۳.....	تعریف مقدار اصلی کوشی (CPV)
۳۴۴.....	استفاده از تبدیل لاپلاس در حل برخی از انتگرال‌ها
۳۴۵.....	انتگرال‌های فرولانی
۳۵۲.....	<b>درسنامه ۸: مشتق‌گیری از انتگرال</b>
۳۵۲.....	اولین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۳۵۳.....	مشتق‌گیری از انتگرال
۳۶۵.....	تعمیم فرمول مشتق‌گیری از انتگرال
۳۶۸.....	انتگرال‌های وابسته به پارامتر
۳۷۴.....	<b>درسنامه ۹: معوفی توابع گاما و بتا</b>
۳۷۴.....	تابع گاما
۳۷۸.....	تابع بتا
۳۷۸.....	خواص مهم تابع بتا

## فصل پنجم: کاربرد انتگرال

۳۸۴.....	<b>درسنامه ۱۰: محاسبهٔ حد مجموع به کمک انتگرال معین</b>
۳۹۴.....	سه بحث مفهومی و مهم
۳۹۸.....	<b>درسنامه ۱۱: محاسبهٔ سطح محصور</b>
۳۹۸.....	محاسبهٔ مساحت محصور بین یک منحنی و محورها
۴۰۵.....	محاسبهٔ مساحت محصور بین دو منحنی
۴۱۵.....	<b>درسنامه ۱۲: محاسبهٔ حجم حاصل از دوران</b>
۴۱۵.....	محاسبهٔ حجم به روش دیسک (روش قرصی)
۴۲۵.....	روش «پوسته استوانه‌ای» برای بدست آوردن حجم
۴۲۲.....	نحوهٔ استخراج فرمول‌های حجم
۴۳۳.....	جمع‌بندی و مطالبی جهت به خاطر سپردن فرمول‌ها
۴۳۳.....	قرار گرفتن ناحیه در دو سمت محور دوران
۴۳۳.....	محاسبهٔ حجم با استفاده از سطح مقطع
۴۴۷.....	<b>درسنامه ۱۳: محاسبهٔ طول قوس منحنی</b>
۴۴۵.....	تعریف تابع طول قوس
۴۴۶.....	<b>درسنامه ۱۴: محاسبهٔ مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی</b>
۴۵۲.....	نحوهٔ استخراج فرمول محاسبهٔ مساحت سطح حاصل از دوران
۴۵۳.....	<b>درسنامه ۱۵: محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل (قضیه پاپوس گلدن)</b>
۴۵۳.....	جسم و چگالی
۴۵۳.....	چگالی غیرثابت
۴۵۴.....	گشتاورها و مرکز جرم
۴۵۵.....	جمع‌بندی
۴۵۶.....	محاسبه گشتاورهای استاتیک
۴۵۶.....	محاسبه مختصات مرکز ثقل یک ناحیه مسطح
۴۵۶.....	مختصات مرکز ثقل یک منحنی مسطح
۴۵۹.....	قضایای گلدن - پاپوس
۴۵۹.....	نحوهٔ استفاده از قضایای گلدن - پاپوس

## فهرست مطالب

### فصل ششم: دنباله و سری

درسنامه‌ها: تعریف و بررسی رفتار دنباله‌ها.....	۴۶۲
بررسی همگرایی و واگرایی دنباله‌ها.....	۴۶۳
محاسبه حدود و عدد همگرایی در دنباله‌ها.....	۴۶۴
چند مثال متنوع دیگر .....	۴۷۵
قضیه اشتولر .....	۴۷۶
بررسی وضعیت همگرایی حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو دنباله.....	۴۷۸
دنباله‌های صعودی و اکیداً صعودی.....	۴۷۸
دنباله‌های نزولی و اکیداً نزولی.....	۴۷۸
روش‌های تعیین کران بالا یا کران پایین دنباله‌ها.....	۴۸۱
درسنامه‌ها: دنباله‌های بازگشتی.....	۴۸۳
دنباله با رابطه‌ی بازگشتی $a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0$ .....	۴۸۶
درسنامه‌ها: تعریف انواع سری و شرایط لازم برای همگرایی سری‌ها .....	۴۸۸
نماد سیگما.....	۴۸۸
خواص سیگما.....	۴۸۸
سری‌های عددی نامتناهی .....	۴۹۰
همگرایی یا واگرایی سری‌ها .....	۴۹۰
بررسی وضعیت همگرایی؛ جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو سری .....	۴۹۱
درسنامه‌ها: آزمون‌های همگرایی برای سری‌های مثبت .....	۴۹۲
سری هندسی و شرط همگرایی .....	۴۹۲
استفاده از $P$ سری .....	۴۹۲
آزمون مقایسه .....	۴۹۶
آزمون خارج قسمت (مقایسه حدی) .....	۴۹۸
آزمون نسبت (آزمون دالامبر) .....	۵۰۱
آزمون ریشه‌ی $n$ ام (آزمون کوشی) .....	۵۰۲
آزمون انگرال .....	۵۰۵
آزمون آبل .....	۵۰۵
آزمون رابه .....	۵۰۶
آزمون تراکم کوشی .....	۵۰۷
سری‌های متناوب .....	۵۱۰
همگرایی مطلق و مشروط .....	۵۱۲
درسنامه‌ها: به دست آوردن حاصل سری‌های عددی .....	۵۱۷
مقدمه‌ای برای ورود به بحث سری‌های تلسکوپی .....	۵۱۷
سری‌های تلسکوپی .....	۵۱۸
سری‌های هندسی .....	۵۲۷
استفاده از تصاعد هندسی در حل برخی مسائل فیزیکی و هندسی .....	۵۳۲
نماد پای ( $\Pi$ ) .....	۵۳۷
درسنامه‌ها: تعریف سری‌های توانی، محاسبه‌ی شعاع و فاصله‌ی همگرایی آن‌ها .....	۵۴۱
سری‌های توانی .....	۵۴۱
محاسبه فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سری توانی .....	۵۴۱
نکته مهم و مکمل در تعیین باز یا بسته بودن بازه همگرایی .....	۵۵۱
سری‌های تابعی و به دست آوردن ناحیه همگرایی آن‌ها .....	۵۵۶
درسنامه‌ها: سری‌های تیلور و مکلورن و کاربرده آنها.....	۵۶۲
مشتق و انتگرال گرفتن از سری‌های توانی .....	۵۷۳
به دست آوردن حاصل برخی از سری‌ها با استفاده از سری‌های مکلورن .....	۵۷۸
بازی با e .....	۵۸۸
کاربردهای دیگر سری تیلور .....	۵۹۳
سری‌های دوگانه .....	۵۹۸

## فهرست مطالب

### فصل هفتم: دستگاه مختصات قطبی

درسنامه١: دستگاه مختصات قطبی و مناهیم مرتبط به آن ..... ۶۰۰
تعریف دستگاه مختصات قطبی ..... ۶۰۰
ارتباط بین مختصات دکارتی و قطبی ..... ۶۰۱
تبدیل معادلات در دستگاه‌های مختصات قطبی و دکارتی ..... ۶۰۲
نمایش چند منحنی و ناحیه در مختصات قطبی ..... ۶۰۵
خط مماس و قائم بر یک منحنی قطبی ..... ۶۰۵
محاسبه‌ی زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر یک منحنی قطبی ..... ۶۰۸
رسم نمودار منحنی‌های قطبی ..... ۶۰۹
بررسی تقارن در منحنی‌های قطبی ..... ۶۱۰
روش دیگر برای رسم منحنی‌های قطبی ..... ۶۱۱
یافتن نقاط برخورد نمودارهای قطبی ..... ۶۱۲
نمایش نمودارهای مهم در مختصات قطبی ..... ۶۱۳
لیماسیون ..... ۶۱۳
رُز چند برگ ..... ۶۱۴
لمنیسکات (یا پروانه) ..... ۶۱۴
مارپیچ ارشمیدس ..... ۶۱۴
مارپیچ لگاریتمی ..... ۶۱۴
نمایش خطوط و مقاطع مخروطی در مختصات قطبی ..... ۶۱۵
درسنامه٢: محاسبه طول قوس، مساحت محصور، سطح و حجم حاصل از دوران در منحنی‌های قطبی ..... ۶۱۷
طول قوس یک منحنی قطبی ..... ۶۱۷
محاسبه‌ی مساحت محصور توسط یک منحنی در مختصات قطبی ..... ۶۲۰
محاسبه‌ی مساحت محصور بین دو منحنی در مختصات قطبی ..... ۶۲۳
مساحت و حجم حاصل از دوران منحنی‌های قطبی ..... ۶۲۹

### فصل هشتم: اعداد مختلط

درسنامه٣: اعداد مختلط و خواص آن ..... ۶۳۳
اعداد مختلط ..... ۶۳۳
اعمال حسابی در اعداد مختلط ..... ۶۳۳
مزدوج یک عدد مختلط ..... ۶۳۴
خواص اعداد مختلط ..... ۶۳۴
ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط ..... ۶۳۹
شكل قطبی اعداد مختلط ..... ۶۳۹
محاسبه‌ی اندازه و آرگومان اعداد مختلط ..... ۶۳۹
تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی ..... ۶۴۰
شکل نمایی عدد مختلط ..... ۶۴۱
ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی ..... ۶۴۲
تون یک عدد مختلط و فرمول دموآور ..... ۶۴۴
لگاریتم یک عدد مختلط ..... ۶۴۰
توابع مثلثاتی ممعکوس ..... ۶۵۲
توابع هذلولی مختلط ..... ۶۵۲
ریشه‌ی یک عدد مختلط ..... ۶۵۴
چند نکته در مورد ریشه‌های سوم عدد یک ..... ۶۵۴
چند نکته در مورد ریشه‌های $n$ ام عدد یک ..... ۶۵۶
معادلات مختلط ..... ۶۵۸
چند قضیه‌ی مهم ..... ۶۶۴
درسنامه٤: نواحی در صفحه مختلط ..... ۶۶۶
بررسی معادله‌ی چند شکل خاص ..... ۶۶۹
منابع و مراجع ..... ۶۷۲